Simulation (Changement de variable)

Soit X une v.a réelle définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Quelle est la loi de la v.a $Y = h(X)$?

telle que h une application de $X(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$

c'st à dire

$$\begin{tikzcd} Y: \Omega \arrow[r, "X"] \arrow[rr, bend right, "h \circ X"'] & X(\Omega) \subset \mathbb{R} \arrow[r, "h"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$$Y = h \circ X = h(X)$$

1^er Cas X st continue :

Soient f la densité de probabilité de X et g la densité de probabilité de Y.

si h une application strictement monotone sur $X(\Omega)$.

Alors la densité de Y st donnée par :

$$g(y) = \begin{cases} \left(f(x) \cdot \left| \dfrac{\partial x}{\partial y} \right| \right)_{x = h^{-1}(y)}, & \text{si } y \in Y(\Omega) = h(X(\Omega)) \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

Example (1) : Si $X \rightsquigarrow N(m, \sigma^2)$ et $Z = \frac{X-m}{\sigma}$

Déterminer la loi de Z.

La densité de probabilité de X est :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$

On a :

$$Z = h(X) = \frac{X-m}{\sigma} \Leftrightarrow z = \frac{x-m}{\sigma}$$

$$\Rightarrow x = \sigma z + m$$

$$\Rightarrow x = h^{-1}(z) = \sigma z + m$$

d'où $\frac{dx}{dz} = \sigma$

Donc la densité de Z est :

$$g(z) = \left(f(x) \cdot \left|\frac{dx}{dz}\right| \right)_{x = \sigma z + m}$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma z + m - m}{\sigma}\right)^2} \times \sigma$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} z^2}, \quad \text{où } z \in \mathbb{R}$$

d'où $Z \rightarrow N(0, 1)$

Application : si $X \rightsquigarrow N(10, 2^2)$

Déterminer $P(X \leq 12{,}14)$.

$$P(X \leq 12{,}14) = P\left(\frac{X-10}{2} \leq \frac{12{,}14-10}{2}\right)$$

$$= P(Y \leq 1{,}07)$$

avec $Y = \frac{X-10}{2} \rightsquigarrow N(0,1)$

d'où d'après la table de $N(0,1)$

$$P(Y \leq 1{,}07) = 0{,}85769$$

Exemple ② :

Soit X une v.a suit la loi uniforme sur l'intervalle $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ $\left(X \rightsquigarrow U_{\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]}\right)$

On pose : $Y = a \tan X$, $(a > 0)$

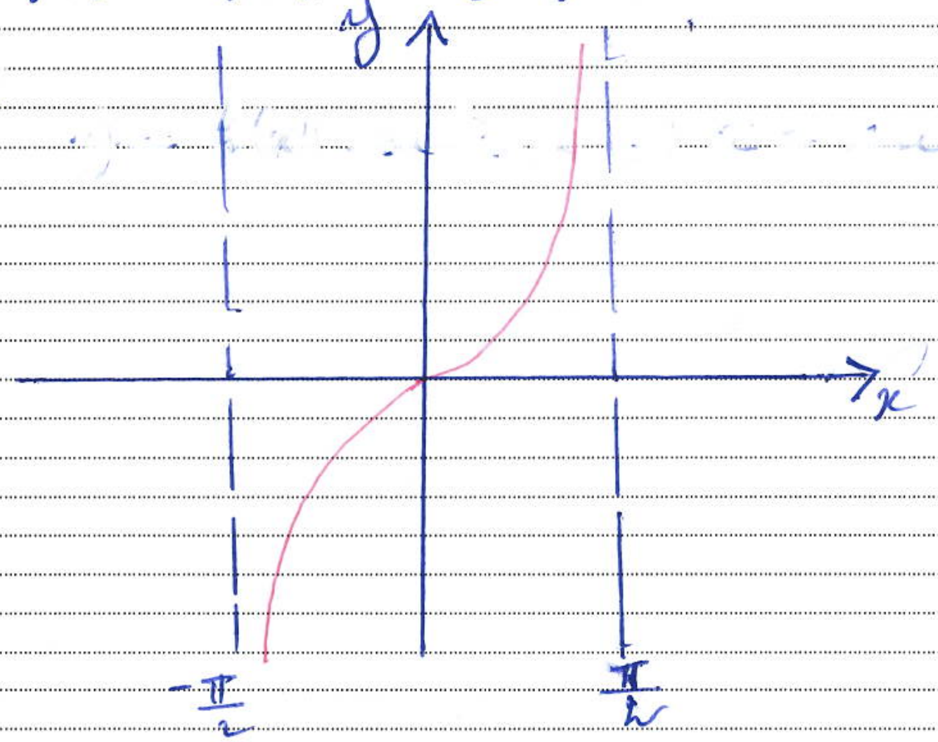
Déterminer la loi de Y.

* La densité de X est :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}, & \text{si } x \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ 0, & \text{si } x \notin \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

On a : $Y = h(X) = a\tan X \iff y = a\tan x = h(x)$

Sur l'intervalle $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ l'application h est strictement croissante.



d'où

$$y = h(x) = a\tan x \iff x = \arctan\left(\frac{y}{a}\right), \quad (a>0)$$

La densité de Y est :

$$g(y) = \left(f(x) . \left|\frac{\partial x}{\partial y}\right| \right)_{x = \arctan\left(\frac{y}{a}\right)}$$

avec $\frac{\partial x}{\partial y} = \frac{\frac{1}{a}}{1 + \left(\frac{y}{a}\right)^2} = \frac{}{(y^2+a^2)}$, $y \in \mathbb{R}$

et par suite $g(y) = \frac{1}{\pi} \frac{a}{y^2+a^2}$

d'où Y suit la loi de Cauchy $(X \rightsquigarrow \mathcal{E}(a))$.

$2^{ème}$ Cas : X est discrète :

X une v.a discrète de la loi $f(k) = P(X = k)$

$Y = h(X)$, avec h est injective

La loi de Y est :

$$g(l) = P(Y = l) = P(h(X) = l)$$

$$= P(X = h^{-1}(l))$$

$$= f(h^{-1}(l))$$

d'où

$$g(l) = \left(f(k)\right)_{k = h^{-1}(l)}$$

Exemple : Si $X \rightsquigarrow G\left(\frac{1}{2}\right)$

Déterminer la loi de $Y = 3X + 2$

On a :

$$f(k) = P(X = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k, \; k = 1, 2, \ldots$$

$$Y = 3X + 2 \Leftrightarrow y = 3x + 2$$

$$\Rightarrow x = \frac{y - 2}{3}$$

d'où $g(l) = \left(f(k)\right)_{k = \frac{l-2}{3}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{l-2}{3}}, \; l = 5, 8, 11, \ldots$

Théorème central limite:

Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi, de moyenne (espérance mathématique) $E(X_i) = m$ et de variance $V(X_i) = \sigma^2$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$

et soit $\bar{X} = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$.

La variable aléatoire:

$$Z_n = \frac{\bar{X} - m}{\sigma/\sqrt{n}}$$

Converge en loi vers une variable aléatoire normale de paramètre 0 et 1: $N(0,1)$

$$Z_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} N(0,1)$$

Soit Φ la fonction de répartition de $N(0,1)$, alors pour tout réel z, on a

$$\lim_{n \to +\infty} P\left(\frac{\bar{X} - m}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z\right) = \Phi(z).$$